Spielereien mit pythagoräischen Zahlen

Roland Kempf

25.5.2003

1 Einleitung

Wissensdurstige können diese Einleitung überspringen. Denn hier wird vorgestellt, was in den nächsten Kapiteln zu finden ist und an wen sich dieser Aufsatz wendet. Mathematikmuffel sollten sofort aufhören zu lesen, es besteht Gefahr etwas Mathematisches zu lernen!

Die restlichen Leser, angefangen vom neugierigen Laien bis hin zum Mathematikstudenten, sollten etwas Interessantes in dem Aufsatz finden können. Die folgenden Kapitel sind in ihren Anforderungen an die Leser gestaffelt.

Kapitel 2 richtet sich an Schüler und Schulabgänger, die den Satz des Pythagoras in der Schule gelernt haben. Oder aber an interessierte Leser, die sich trotzdem dafür interessieren. Es zeigt sich, dass man Mathematik auch im Alltag gebrauchen kann.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Grundlagen der Geometrie von rechtwinkligen Dreiecken. Der Inhalt diese Kapitels ist schon etwas schwieriger zu verstehen, aber wachen Köpfen sollte es keine Schwierigkeiten bereiten ihm zu folgen. Wer Kapitel 2 interessant fand, sollte sich dieses Kapitel nicht entgehen lassen. Als Belohnung winkt die Erinnerung an evtl. längst vergangene Schulzeiten und Lerninhalte und sogar ein tieferes Verständnis von der Wesensart von Dreiecken.

Kapitel 4 zeigt, wie sich mathematische Überlegungen verselbstständigen können. Dort findet der Leser unerwartete Ergebnisse über pythagoräische Zahlen, mit denen man sicherlich auch Partygäste beeindrucken kann. Zusätzlich wird der Leser mit sanften Schritten an den Beweis der Ergebnisse herangeführt und lernt dabei verschiedene Beweistechniken kennen. Vielleicht fördert dieses Kapitel auch das Verständnis für Mathematikern bei Nichtmathematikern.

Kapitel 5 handelt von ein wenig verschrobenen Eigenschaften der pythagoräischen Zahlen. Wer sich bis zum Ende des 4. Kapitels tapfer durchge-

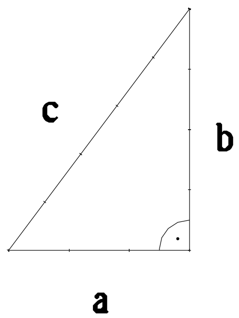

Abbildung 1: Ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.

schlagen hat, der kann sich auch an dieses Kapitel wagen. Dabei erfährt er nebenbei, mit welchen Gedanken sich Mathematiker so ihre Zeit vertreiben.

2 Satz des Pythagoras in der Schule und im Alltag

Ich habe mich vor kurzem erst mit einer guten Bekannten über Mathematik zwischen Tür und Angel unterhalten, die seit über 24 Jahren nichts mehr mit Mathematik zu tun hat – abgesehen von den Grundrechenarten und Prozentrechnung für die Mehrwertssteuer. In diesem Gespräch fiel das Stichwort "Pythagoras."

Hand auf's Herz: Wer kann die Formel noch auswendig, die Generationen von Schülern auswendig gelernt haben? – Sie lautet:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Ich glaube, das werden noch viele wissen. Aber wer weiß noch deren Bedeutung?

Das hatte doch etwas mit Dreiecken zu tun, oder? Ja, richtig: sogar mit besonderen Dreiecken, nämlich solchen, die einen rechen Winkel, einen Winkel von 90°, haben. In solchen "rechtwinkligen Dreiecken" erfüllen die Seitenlängen a, b und c die pythagoräische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Als Beispiel ist in Abb.1 ein rechtwinkliges Dreieck aufgezeichnet. Die Seitenlängen sind $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ Einheiten lang. Setzt man diese Zahlen in die pythagoräische Gleichung ein, so kann man die Richtigkeit der Gleichung in diesem Fall überprüfen:

$$3^2 + 4^2 = 5^2. \tag{2}$$

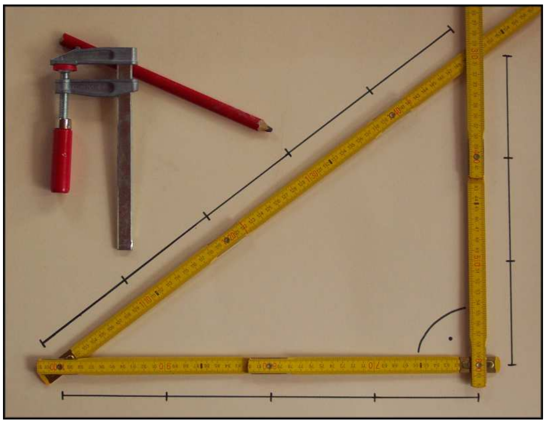

Abbildung 2: Ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen $a = 30cm$, $b = 40cm$ und $c = 50cm$.

Natürlich ist die Überprüfung eines Beispiels noch kein Beweis dafür, dass Pythagoras vor über 2500 Jahren Recht hatte. Seit dieser Zeit sind aber eine Unmenge von verschiedenen Beweisen für diesen Satz erbracht worden[1] [2].

Viel wichtiger für die praktische Anwendung ist allerdings die Umkehrung: Wenn in einem Dreieck die Seitenlängen a, b und c die pythagoräische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, dann ist der Winkel zwischen den Seiten a und b ein rechter Winkel. Damit gelingt es auf ganz einfache Weise mit einem Zollstock einen rechten Winkel zu erhalten, wie Abb.2 zeigt.

Dieses Geheimnis hat mir mein Vater vor vielen Jahren verraten, als ich noch ein kleiner Bub war. Wir waren gerade mit dem Ausbau des Dachbodens beschäftigt und hatten gerade keinen "rechten Winkel" zur Hand. Und da soll nochmal einer behaupten, dass man Mathematik nicht gebrauchen kann...

3 Rechtwinklige und ähnliche Dreiecke

In diesem Kapitel wird die pythagoräische Gleichung eingehender untersucht. Die Untersuchung wird auf den Begriff der "ähnlichen Dreiecken" führen und einen ersten richtigen mathematischen Beweis zeigen.

Vielleicht ist dem ein oder anderen aufgefallen, dass die Längeneinheit der Seitenlängen der Dreiecke im vorherigen Kapitel nicht genauer festgelegt worden sind. Im Falle des Beispiels in Abb.1 wurden nur von "Einheiten" gesprochen. In Abb.2 ist sogar statt der feinen Zentimetereinteilung eine

[1] Sogar ein amerikanischer Präsident hat einen solchen geliefert[1].

zweite, gröbere im Foto zu sehen. Spielt denn die Längeneinheit überhaupt keine Rolle?

Die Antwort auf die Frage ist: Nein, das tut sie nicht! Um dies zu sehen, betrachten wir ein Beispiel: Stellen wir uns vor, wir haben ein Blatt Papier, auf dem ein rechtwinkliges Dreieck gemalt ist, mit Seitenlängen $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $c = 5cm$. Dieses Blatt legen wir auf einen Kopierer und vergrößern es auf das Doppelte. Dann erhalten wir wieder ein Dreieck. Allerdings sind die Seitenlängen nun $a = 6cm$, $b = 8cm$ und $c = 10cm$. Wir können wiederum die pythagoräische Gleichung heranziehen und testen, ob sie erfüllt ist und somit sicherstellen, dass wir wieder ein rechtwinkliges Dreieck erhalten haben. Und tatsächlich nach

$$(6cm)^2 + (8cm)^2 = (10cm)^2 \tag{3}$$

stimmen nicht nur die Zahlenwerte überein, sondern auch die Einheiten, in diesem Fall cm^2.

Dass auch die Einheiten übereinstimmen, ist sehr wichtig. Denn wir könnten den Kopierer auch so einstellen, dass er das ursprüngliche Dreieck um den Faktor 2.54 vergrößert, der dem Umrechnungsfaktor von cm auf $inch$ entspricht. Dann hätte das neue Dreieck die Seitenlängen $a = 3inch$, $b = 4inch$ und $c = 5inch$ und würde auch die pythagoräische Gleichung erfüllen.

Wie gesehen, ist es egal, in welcher Einheit wir die Seitenlängen angeben $(cm, inch, Ellen, km, Lichtjahre, ..)$. Auch können wir jede der Seitenlängen um den gleichen Faktor vergrößern oder verkleinern und die pythagoräische Gleichung bleibt trotzdem erfüllt.

Wenn man mit Umformungen von Gleichungen vertraut ist, so ist die obige Erkenntnis sehr einfach in dem folgenden mathematischen Beweis nachzuvollziehen. Da der Text auch ohne die Beweise lesbar bleibt, ist er durch den Beginn mit den Wort "Beweis:" und durch das Zeichen "□" am Ende gekennzeichnet. Zwar ist das Begreifen jedes einzelnen Schrittes in einem Beweis in der Regel mühsam, doch ermöglicht ein Beweis zum einen sicherzustellen, dass der Autor dem Leser keinen Bären aufbindet, und zum anderen verrät ein gut geführter Beweis viel mehr über die inneren Zusammenhänge der betrachteten mathematischen Objekte[2].

Beweis:

Angenommen wir haben ein ursprüngliches Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c, die die pythagoräische Gleichung erfüllen. Dann kann man die

[2] Ähnlich verhält es sich mit dem Quellcode von Computerprogrammen. Jeder Hersteller kann behaupten, was seine Software macht oder unterlässt. Nachprüfen kann man diese Behauptungen in der Regel nur, wenn man die Einzelschritte, also den Quellcode, der dem Programm zugrunde liegt, überprüfen kann.

pythagoräische Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{4}$$

mit dem Faktor k^2 durchmultiplizieren:

$$(a^2 + b^2) \cdot k^2 = c^2 \cdot k^2, \tag{5}$$

die Klammer auf der linken Seite ausrechnen:

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 \cdot k^2 = c^2 \cdot k^2, \tag{6}$$

und die quadratischen Terme auf der linken Seite in je einer Klammer zusammenfassen:

$$(a \cdot k)^2 + (b \cdot k)^2 = (c \cdot k)^2. \tag{7}$$

So erhält man die pythagoräische Gleichung für ein Dreieck mit den Seitenlängen $a \cdot k$, $b \cdot k$ und $c \cdot k$, das sich durch eine Skalierung mit den Skalierungsfaktor k aus dem ursprünglichen ergibt. Also ist die pythagoräische Gleichung auch für das neue, skalierte Dreieck erfüllt. □

In diesem Beweis wurde auch ein beliebter Trick aus dem Mathematik angewandt. Im Beweis wurde gar nicht genau festgelegt, wie groß der Skalierungsfaktor k ist. Der Beweis klappt also für jeden erdenklichen Skalierungsfaktor! Ein solcher Beweis bewahrt uns davor, Tage vor einem Kopierer zu verbringen, um eine Vergrößerung zu finden, mit der wir aus unserem ursprünglichen, rechtwinkligen Dreieck ein nichtrechtwinkliges Dreieck erzeugen können. Alle Vergrößerungen führen wieder auf rechtwinklige Dreiecke.

In meiner Schulzeit habe ich in diesem Zusammenhang den Begriff der "ähnlichen Dreiecke" gelernt, die das Skalieren von Dreiecken betraf. Zwei Dreiecke wurden "ähnlich" genannt, wenn man aus dem kleineren Dreieck das größere erhält, indem man alle Seitenlängen um den gleichen Faktor vergrößert, bzw. wenn man aus dem größeren Dreieck das kleinere erhält, indem man alle Seitenlängen um den gleichen Faktor verkleinert. Mit den Überlegungen oben können wir nun sagen, dass Dreiecke, die zu einem rechtwinkligen Dreieck ähnlich sind, selbst rechtwinklige Dreiecke sein müssen[3].

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Kapitel ist: Wir können auch einem amerikanischen Freund den Trick mit dem Zollstock aus dem vorhergehenden Kapitel verraten und brauchen uns dabei keine Gedanken machen, dass er statt einem Zollstock mit Zentimetereinteilungen vielleicht einen Yardstick mit Inch verwendet.

[3]Zwei ähnlich Dreiecke haben sogar immer die gleichem Winkel, auch wenn sie nicht rechtwinklig sind. Dies zu erläutern führt aber an dieser Stelle zu weit vom Hauptanliegen ab.

4 Pythagoräische Zahlen

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, brauchen wir uns um Längeneinheiten und Skalierungsfaktoren bei der pythagoräischen Gleichung keine Gedanken zu machen. Interessanterweise gibt es eine Reihe von positiven, ganzen Zahlen a, b und c, die die pythagoräischen Gleichung erfüllen. Solche Zahlen werden auch "Pythagoräische Zahlen" genannt[4].

Im ersten Kapitel wurden schon die pythagoräischen Zahlen 3, 4 und 5 bzw. 6, 8 und 10 genannt. Es ist sehr einfach aus einem Tripel (a, b, c) von pythagoräischen Zahlen neue zu generieren: Dazu müssen diese Zahlen nur mit einem ganzzahligen (positiven) Skalierungsfaktor, k, versehen werden und man erhält ein neues Tripel $(a \cdot k, b \cdot k, c \cdot k)$ von pythagoräischen Zahlen. Für $k = 2$ erhält man so aus $(3, 4, 5)$ die pythagoräischen Zahlen $(6, 8, 10)$.

Aber es gibt noch weitere Tripel, z.B. $(5, 12, 13)$, die sich nicht aus $(3, 4, 5)$ durch einen einfachen Faktor ergeben. Damit tauchen eine Reihe von Fragen auf: Gibt es außer $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$ noch weitere Tripel pythagoräischer Zahlen, die nicht durch Skalierung aus diesen hervorgehen? Wie viele solcher unterschiedlicher Zahlentripel gibt es? Kann man diese Zahlentripel systematisch berechnen oder muss man sie erraten?

Diese Fragen sind ein Beispiel dafür, wie sich mathematische Fragestellungen verselbstständigen können. Es ist ja ganz nett zu wissen, dass wir den Zollstocktrick aus dem zweiten Kapitel auch mit $(5, 12, 13)$ anstatt mit $(3, 4, 5)$ machen können, aber das ist für die Anwendung dieses Tricks in der Regel unerheblich. Also könnten wir an dieser Stelle den Artikel beenden.

Ich habe mich allerdings trotzdem dafür interessiert. Ich habe mir nicht nur die Mühe gemacht, mich mit dieser Fragestellung zu beschäftigen, sondern auch noch versucht die Gedanken und Ergebnisse verständlich aufzuschreiben. Und warum? – Das liegt an meiner Neugier und Freude an der Sache. Aber scheinbar interessiert es auch Sie ein bisschen, sonst hätten Sie im letzten Abschnitt aufgehört zu lesen.

Doch zu Beginn eine Warnung: Die weiteren Ausführungen werden etwas steiniger werden, sie werden einige mathematische Methoden und Grundlagen verwenden, die nicht unbedingt im Mathematikunterricht behandelt werden. Ich werde versuchen, sie so weit wie möglich zu erklären. Wer sich durch die Erklärungen durchbeißt, wird am Ende nicht nur mit einem Schema belohnt werden, mit dem sich *alle* pythagoräischen Zahlen systematisch

[4]Dieser Punkt klingt vielleicht trivial. Aber hätten Sie gewusst, dass die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für alle ganzzahligen $n > 2$, z.B. $a^3 + b^3 = c^3$, keine Lösungen für positive, ganze Zahlen a, b und c hat? Dieses Problem – auch Fermats letzter Satz genannt – hat über 300 Jahre Generationen von Mathematikern gewurmt [3], bis er schließlich vor ein paar Jahren bewiesen wurde!

finden lassen, sondern auch wissen, warum dies so ist!

Also fangen wir mit eine paar Grundlagen an: Die pythagoräischen Zahlen sind natürliche Zahlen, also ganzzahlige, positive Zahlen. Natürliche Zahlen, die größer als 1 sind, lassen sich immer eindeutig in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen, z.B. $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Dazu betrachtet man eine natürliche Zahl a. Wenn sie durch 2 ohne Rest teilbar ist, so schreibt man eine 2 auf und betrachtet die Zahl $a/2$. Ist $a/2$ wieder durch 2 teilbar, so schreibt man eine weitere 2 auf und betrachtet $a/4$, usw. bis das Ergebnis der Prozedur nicht mehr durch 2 teilbar ist. Die Zahl der aufgeschriebenen Zweier ist die Anzahl der Primteiler 2 von a. Wie für die Primzahl 2 ist dieses Verfahren für alle weiteren Primzahlen, d.h. für 3, 5, 7, 11, usw. fortzuführen, bis von der ursprünglichen Zahl a nur noch der Faktor 1 übrig bleibt. Die aufgeschriebenen Zahlen sind dann die Primteiler von a. Sie sind eindeutig für jede Ausgangszahl a festgelegt.

Als Beispiel soll die Zahl 28 in Primfaktoren zerlegt werden: Sie ist durch 2 teilbar, also wird dieser Primfaktor notiert und das Ergebnis von $28/2 = 14$ weiter untersucht. Auch 14 ist durch 2 teilbar und es ergibt sich $14/2 = 7$. Das Ergebnis, 7, ist nicht mehr durch 2 teilbar, und auch nicht durch die nächsten Primzahlen 3 und 5. Schließlich ist er aber durch die Primzahl 7 teilbar. Da sich durch $7/7 = 1$ die Zahl 1 ergibt, ist die Primteilersuche von 28 beendet. So erhält man die Primfaktorzerlegung von 28 zu $2 \cdot 2 \cdot 7$.

Zwei natürliche Zahlen a und b sind "teilerfremd", wenn sie keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Z.B. sind 3 und 4 teilerfremd, aber 6 und 8 sind nicht teilerfremd, da beide den Primteiler 2 haben.

Im weiteren werden wir uns nur mit pythagoräischen Zahlen, a, b und c beschäftigen, wenn a und b teilerfremd sind. Beispiele sind die Tripel $(3, 4, 5)$ oder $(5, 12, 13)$ und nicht $(6, 8, 10)$ oder $(9, 12, 15)$. In einem solchen Fall sind auch a und c bzw. b und c teilerfremd. Dies kann man mit einem Widerspruchsbeweis, einem der gängigsten Beweisformen, zeigen:

Beweis:

Wir nehmen an, dass zwar a und b teilerfremd sind, aber a und c nicht teilerfremd sind. Im weiteren zeigen wir durch mathematische Umformungen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt und daher nicht aufrechterhalten werden kann.

Wenn a und c nicht teilerfremd sind, so besitzen sie einen gemeinsamen Primfaktor p und lassen sich schreiben als $a = \tilde{a} \cdot p$ und $c = \tilde{c} \cdot p$ mit natürlichen Zahlen $\tilde{a}$ und $\tilde{c}$. Löst man die pythagoräische Gleichung nach b^2 auf, so ergibt sich:

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{8}$$

und nach dem Einsetzen obiger Darstellung für a und c:

$$b^2 = (\tilde{c} \cdot p)^2 - (\tilde{a} \cdot p)^2 = (\tilde{c}^2 - \tilde{a}^2) \cdot p^2. \tag{9}$$

Da $(\tilde{c}^2 - \tilde{a}^2) \cdot p$ auch eine natürliche Zahl ist, muss b^2 durch p teilbar sein. Da b^2 und b genau die gleichen Primfaktoren besitzen – wobei diese bei b^2 doppelt so häufig vorkommen, wie bei b – muss b auch den Primfaktor p haben. Dann besitzen aber sowohl a als auch b den Primfaktor p und sind damit nicht teilerfremd. Das widerspricht aber unserer Annahme.

Wenn wir also voraussetzen, dass a und b teilerfremd sind, so müssen auch a und c teilerfremd sein. Analog folgt, dass dann auch b und c teilerfremd sein müssen. □

Warum aber sollten wir unsere Untersuchungen nur auf teilerfremde pythagoräische Zahlen einschränken? – Bei nicht teilerfremden pythagoräischen Zahlen können wir immer einen gemeinsamen Primfaktor ausklammern bis wir zu teilerfremden pythagoräischen Zahlen kommen. Umgekehrt können wir, wie oben erwähnt, aus teilerfremden pythagoräischen Zahlen durch Multiplikation mit Primzahlen und anderen natürlichen Zahlen alle anderen nicht teilerfremden pythagoräischen Zahlen erhalten. Die teilerfremden pythagoräischen Zahlen bilden also die Grundlage für alle pythagoräischen Zahlen, ähnlich wie die Primzahlen die Basis für alle natürlichen Zahlen größer 1 bilden.

Im weiteren Verlauf des Kapitels nehmen wir an, dass das Tripel (a, b, c) teilerfremde pythagoräische Zahlen sind. Wir wollen ein wenig mehr über die inneren Zusammenhänge der Zahlen a, b und c herausfinden. Dazu ist es zweckmäßig, wie wir leider erst sehr viel später sehen werden, die Zahlen auf eine andere Weise darzustellen.

Wir schreiben $b = a + n$ und $c = a + n + m$ mit natürlichen Zahlen a und m und einer ganzen Zahl $n > -a$, damit auch b positiv ist. Setzen wir diese Schreibweise in die pythagoräische Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10}$$

ein, so ergibt sich

$$a^2 + (a + n)^2 = (a + n + m)^2 \tag{11}$$

und nach dem Ausmultiplizieren

$$a^2 + a^2 + 2an + n^2 = a^2 + n^2 + m^2 + 2an + 2am + 2nm \tag{12}$$

und nach Elimination von gleichen Größen auf beiden Seiten der Gleichung

$$a^2 = m^2 + 2am + 2nm \tag{13}$$

und nach Ausklammern vom m auf der rechten Seite

$$a^2 = m \cdot (m + 2a + 2n). \tag{14}$$

Um die Sache noch ein wenig komplizierter zu machen, können wir m aufteilen in $m = l \cdot v^2$, mit natürlichen Zahlen l und v, die auch den Wert 1 annehmen können. Dabei soll l keinen Primfaktor mehrfach enthalten. Dies ist immer möglich. Um das zu sehen, startet man mit der Wahl $l = m$ und $v = 1$. Enthält l einen Primfaktor, z.B. 3, mehrfach, so kann man neue Zahlen l und v wählen, und dabei l um den Faktor 3^2 verringert und v um den Faktor 3 erhöht wird, die dann auch die Gleichung $m = l \cdot v^2$ erfüllen. Diese Prozedur kann so lange fortgesetzt werden bis l eben keinen Primfaktor mehrfach enthält.

Wie aus Gl.14 zu ersehen ist, enthält a^2 den Teiler m und damit auch die Teiler l und v^2. Da a^2 eine Quadratzahl ist und l keinen Primfaktor mehrfach enthält, muss auch $l^2 \cdot v^2$ ein Teiler von a^2 sein. Da a^2 genau die doppelte Zahl der gleichen Primfaktoren wie a enthält, muss a auch die Faktoren l und v enthalten. Wenn wir a durch l und v teilen, so erhalten wir eine natürliche Zahl s. Damit lässt sich a schreiben als

$$a = l \cdot v \cdot s \tag{15}$$

mit natürlichen Zahlen l, v und s.

Der Sinn dieser kurios anmutenden, komplizierten Darstellung der Zahlen a, b und c wird im Folgenden ersichtlich. Dazu wird die gewonnene Darstellung von $m = l \cdot v^2$ und a aus Gl.15 in Gl.14 eingesetzt:

$$l^2 v^2 s^2 = l v^2 \cdot (l v^2 + 2lvs + 2n) \tag{16}$$

und nach Elimination der gemeinsamen Faktoren lv^2 auf beiden Seiten erhält man:

$$ls^2 = lv^2 + 2lvs + 2n \tag{17}$$

und nach Ordnen der Terme, die von l abhängen, und dem Ausklammern von l:

$$l(s^2 - v^2 - 2vs) = 2n \tag{18}$$

und schließlich nach dem Auflösen nach n:

$$n = l\frac{s^2 - v^2 - 2vs}{2} = l\frac{s^2 - v^2}{2} - lvs. \tag{19}$$

Aus Gl.18 ist zu entnehmen, dass l ein Teiler von $2n$ ist. Im folgenden Exkurs wird durch die Annahme widerlegt, dass l und n einen gemeinsamen

Primteiler p besitzen. In einem solchen Fall würden, sowohl n, als auch m und a, die ja beide durch l teilbar sind, den Primteiler p besitzen. Dann könnte man diesen Primteiler auch bei der oben eingeführten Darstellung von b und c ausklammern. Also hätten a, b und c den gleichen Primteiler p und wären damit nicht teilerfremd.

Also haben l und n keinen gemeinsamen Primteiler und somit folgt, dass l nicht nur ein Teiler von $2n$, sondern sogar ein Teiler von 2 ist. Mit anderen Worten: l kann nur die Werte 1 oder 2 annehmen.

Somit wurden die Zahlen a, n und m durch l, s und v ausgedrückt und man erhält die Gleichungen:

$$a = lvs \tag{20}$$

$$b = a + n = lvs + l\frac{s^2 - v^2}{2} - lvs = l\frac{s^2 - v^2}{2} \tag{21}$$

$$c = a + n + m = lvs + l\frac{s^2 - v^2}{2} - lvs + lv^2 = l\frac{s^2 + v^2}{2} \tag{22}$$

Der Parameter l muss den Wert 2 annehmen, wenn die Ausdrücke $s^2 - v^2$ bzw. $s^2 + v^2$ nicht durch 2 teilbar sind, also wenn eine der beiden Parameter s und v gerade und der andere ungerade ist, um natürliche Zahlen für b und c zu erhalten. Sind die Ausdrücke $s^2 - v^2$ bzw. $s^2 + v^2$ durch 2 teilbar, so muss der Parameter l den Wert 1 annehmen, da andernfalls der Primfaktor 2 sowohl in a als auch in b und c enthalten wäre und damit a, b und c nicht teilerfremd wären.

Um sicherzustellen, dass $b > 0$ bzw. $n > -a$ ist, müssen die Parameter s und v zusätzlich die Bedingung $s > v$ erfüllen, wie man aus Gl.21 herleiten kann.

Zusammenfassend ist also

$$a = l \cdot vs \tag{23}$$

$$b = l \cdot \frac{s^2 - v^2}{2} \tag{24}$$

$$c = l \cdot \frac{s^2 + v^2}{2} \tag{25}$$

mit $s > v$ und

$$l = \begin{cases} 1 & \text{für } s \text{ gerade, } v \text{ gerade,} \\ 2 & \text{für } s \text{ gerade, } v \text{ ungerade,} \\ 2 & \text{für } s \text{ ungerade, } v \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für } s \text{ ungerade, } v \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{26}$$

darstellbar.

Was haben wir nun durch diese kompliziertere Darstellung eigentlich erreicht? Erstens wissen wir, dass sich teilerfremde pythagoräische Zahlen a, b und c immer auf diese Weise darstellen lassen. Wir ziehen also *alle* teilerfremden pythagoräische Zahlen in Betracht, wenn wir diese Darstellung verwenden.

Umgekehrt liefert uns diese Darstellung *immer* pythagoräische Zahlen a, b und c. Statt die drei natürlichen Zahlen a, b und c zu wählen und zu überprüfen, ob sie die pythagoräische Gleichung erfüllen, müssen wir nur noch die zwei Zahlen s und v mit $s > v$ wählen und in die Darstellung einsetzen. Wir brauchen uns also nicht mehr darum kümmern, ob die resultierenden Zahlen a, b und c auch die pythagoräische Gleichung erfüllen, sondern bekommen diese Eigenschaft geschenkt[5].

Bei dieser Zusammenfassung haben wir noch eine Eigenschaft außer Acht gelassen: Wann erhalten wir durch diesen Formalismus ausschließlich *teilerfremde* pythagoräische Zahlen a, b und c? Die Antwort liefert folgendes Lemma[6]:

Lemma 1 *Die pythagoräischen Zahlen a, b und c sind genau dann teilerfremd, wenn v und s teilerfremd sind.*

Beweis:

Angenommen v und s sind nicht teilerfremd und haben also einen gemeinsamen Primteiler p. Dann haben auch a, b und c diesen Primteiler, da er sich aus ihren Darstellungen nach Gl.23, 24 und 25 ausklammern lässt. In diesem Fall sind also auch a, b und c nicht teilerfremd.

Angenommen v und s sind teilerfremd. Dann können a, b und c nicht die Zahl 2 als gemeinsamen Primteiler haben, denn:

1.) Wenn v und s beide ungerade sind, so ist $l = 1$ und $a = vs$. Dann ist a ungerade und hat somit keinen Primteiler $p = 2$.

2.) Wenn v und s beide gerade sind, so sind sie nicht teilerfremd, wie angenommen.

3.) Wenn genau einer der beiden Parameter v und s gerade und der andere ungerade ist, so ist $l = 2$ und $c = s^2 + v^2$. Dann ist c ungerade und hat somit keinen Primteiler $p = 2$.

[5]Was auf den letzten Seiten entwickelt wurde, ist ein Beweis in Textform. Diese Darstellungsform verhindert, dass der Leser den Beweis sofort erkennt und überblättert, weil er sich damit nicht beschäftigen will. Ich habe den Beweis versteckt und dem Leser sozusagen untergeschoben, damit er am Ende nicht einfach nur das Resultat anschaut und schulterzuckend zu Kenntnis nimmt, sondern die Ideen, die hinter der gezeigten Darstellung stecken, erkennt.

[6]Als Lemma werden mathematische Sätze bezeichnet, die als technische Hilfsmittel in anderen Beweisen eingesetzt werden, aber selbst keine herausragenden Zusammenhänge beschreiben.

Wenn v und s teilerfremd sind, so können a, b und c auch keinen gemeinsamen Primteiler $p \neq 2$ haben, denn sonst wäre einerseits p auch ein Primteiler von $c + b = ls^2$ und sogar von s, da er kein Primteiler von $l \in \{1, 2\}$ ist. Andererseits wäre p auch ein Primteiler von $c - b = lv^2$ und sogar von v, da er kein Primteiler von $l \in \{1, 2\}$ ist. Dann wären s und v aber nicht teilerfremd. Also müssen im Falle von teilerfremden Parametern v und s auch die Zahlen a, b und c teilerfremd sein. □

Alle wichtigen Ergebnisse diese Kapitels werden hier nochmals in einem Satz[7] zusammengefasst:

Satz 1 *Man erhält genau alle pythagoräische Zahlentripel, indem man durch die Wahl von teilerfremden natürlichen Zahlen v und s durch die Formeln*

$$a = l \cdot vs \tag{27}$$

$$b = l \cdot \frac{s^2 - v^2}{2} \tag{28}$$

$$c = l \cdot \frac{s^2 + v^2}{2} \tag{29}$$

mit $s > v$ und

$$l = \begin{cases} 2 & \text{für } s \text{ gerade, } v \text{ ungerade,} \\ 2 & \text{für } s \text{ ungerade, } v \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für } s \text{ ungerade, } v \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{30}$$

die (teilerfremden pytharogräischen) Zahlen a, b und c bestimmt und diese Zahlen anschließend mit einer beliebigen natürlichen Zahl k multipliziert.

Da v und s teilerfremd sind, können sie nicht beide gerade sein, weil sie ja sonst beide einen Primteiler von 2 hätten. Deshalb ist dieser Fall bei der Bestimmung von l in obigem Satz nicht nötig und wurde gar nicht mehr erwähnt.

Und so ist der Satz auf einer Party anwendbar: Bringen Sie zuerst das Thema "Pythagoras" ins Gespräch, aber achten Sie darauf, nicht sofort die Zuhörer zu verprellen. Erwähnen Sie dann die pythagoräischen Zahlen $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$. Dann können Sie so tun, als würden Sie kurz überlegen und murmeln Sie so etwas wie: "Jetzt bräuchte ich einen Bleistift und Papier". Wählen Sie dann eine sehr große Zahl, z.B. $v = 1321$, und s zu dem Doppelten von v plus 1. Damit können Sie sichergehen, dass $s > v$ und s und v teilerfremd sind. Wenn Sie dann die Formeln aus Satz 1 im Kopf haben, können

[7] Die Bezeichnung "Satz" deutet auf ein zentrales Ergebnis der mathematischen Untersuchungen hin.

Sie den verblüfften Zuhörern gigantisch hohe, teilerfremde pythagoräische Zahlen präsentieren. In obigem Beispiel ergeben sich so aus $v = 1321$ und $s = 2v + 1 = 2643$ die Zahlen $a = 3491403$, $b = 2620204$ und $c = 4365245$. Das soll erst einmal einer so schnell nachmachen!

Mit dieser Zusammenfassung sind auch alle aufgeworfenen Fragen aus diesem Kapitel beantwortet: Gibt es außer $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$ noch weitere Tripel pythagoräischer Zahlen, die nicht durch Skalierung aus diesen hervorgehen? – Ja, einen ganzen Haufen. Wie viele solcher unterschiedlicher Zahlentripel gibt es? – Genau so viele, wie es teilerfremde Paare v und s mit $s > v$ gibt: unendlich viele! Kann man diese Zahlentripel systematisch berechnen oder muss man sie erraten? – Man kann sie berechnen!

Natürlich gibt es noch eine Vielzahl von anderen Fragen, die man sich in diesem Zusammenhang stellen kann. Eine weitere wird im nächsten Kapitel angesprochen. Aber dann ist auch Schluss.

5 Rechtwinklige und pythagoräische Dreiecke

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, dreht die Behandlung der pythagoräischen Zahlen in diesem Kapitel ein wenig ab. Ich möchte vorwegschicken, dass ich aus den Ergebnissen in diesem Kapitel keinen praktischen Nutzen ziehen kann. Sie liefern weder einen Zollstocktrick, noch eine Aussage mit der man Leute auf einer Party beeindrucken kann, es sein denn, es ist eine Erstsemesterparty von Mathematikstudenten.

Aber nun in medias res: In diesem kurzen Kapitel möchte ich zeigen, dass man ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck durch eine Serie von Dreiecken annähern kann, deren Seitenlängen sich aus pythagoräischen Zahlen und einem Skalierungsfaktor ergeben. Interessant, oder?

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, kann man ohne Bedenken bei rechtwinkligen Dreiecken eine Skalierung mit einem konstanten Faktor vornehmen, ohne dass sich der rechte Winkel ändert, bzw. die pythagoräische Gleichung in Mitleidenschaft gezogen wird (Stichwort: Kopierer). Außerdem ändert sich bei einer solchen Skalierung das Verhältnis der Seitenlängen nicht. Z.B. das Verhältnis y der Seitenlängen b und a hat nach der Skalierung mit dem Faktor k den gleichen Wert $y = \frac{k \cdot b}{k \cdot a} = \frac{b}{a}$ wie vor der Skalierung.

Ein rechtwinkliges Dreieck wird, wenn man die Skalierung außer Acht lässt, sogar eindeutig durch das Seitenverhältnis $y = \frac{b}{a}$ festgelegt! Denn aus der Seitenlänge von a, die man durch eine Skalierung bzw. Normierung auf eine Einheitlänge bringen kann, also $a = 1$, kann mit dem Seitenverhältnis y durch $b = y \cdot a$ die normierte Seitenlänge $b = y$ berechnet werden und aus der pythagoräischen Gleichung die normierte Seitenlänge

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+y^2}$. Und durch die drei normierten Seitenlängen ist das normierte rechtwinklige Dreieck eindeutig festgelegt[8]. Für unsere Behauptung müssen wir also nur nachweisen, dass wir pythagoräische Zahlen a und b finden können, deren Verhältnis sich an ein gewünschtes Seitenverhältnis y unseres beliebig gewählten rechtwinkligen Dreiecks annähert.

Aufgrund der expliziten Darstellung der pythagoräischen Zahlen aus dem vorangegangenen Kapitel kann man das Seitenverhältnis $y = \frac{b}{a}$ eines pythagoräischen Dreiecks mit pythagoräischen Zahlen a, b (und c) wie folgt darstellen:

$$y = \frac{b}{a} = \frac{l\frac{s^2-v^2}{2}}{lvs} = \frac{s^2-v^2}{2vs} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{v} - \frac{v}{s}\right). \tag{31}$$

Bezeichnet man das Verhältnis von s zu v mit $x = \frac{s}{v}$, so lässt sich y als eine Funktion $f(x)$ von x durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \tag{32}$$

schreiben, wobei $x > 1$ ist, da ja nach Satz 1 zusätzlich $s > v$ gilt.

Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ lässt sich auch umkehren und durch eine Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ ausdrücken. Dazu multipliziert man Gl.32 mit $2x$:

$$2xy = x^2 - 1 \tag{33}$$

bringt alle Terme auf eine Seite:

$$x^2 - 2xy - 1 = 0 \tag{34}$$

und erhält mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x = y \pm \sqrt{y^2+1}, \tag{35}$$

wobei der Wert von x mit $x > 1$ gesucht ist. Also ist die Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y) = y + \sqrt{y^2+1}. \tag{36}$$

Wenn pythagoräische Zahlen mit einem bestimmten Verhältnis $y = \frac{b}{a}$ gesucht werden, dann kann man mit $x = f^{-1}(y)$ überprüfen, ob x ein Bruch

[8]Als Randbemerkung sei erwähnt, dass eine Skalierung bzw. Normierung die Winkel im Dreieck nicht verändert. Deshalb ist auch das Seitenverhältnis $y = \frac{b}{a}$ auch für die Winkel α und β charakteristisch. Die Funktionen, die diesen Zusammenhang beschreiben, lauten Tangens und Cotangens und es gilt $\tan(\beta) = y$ und $\cot(\alpha) = y$. Die Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens, und Cotangens dienen also nur dazu, den Winkel auf die charakteristischen Seitenverhältnisse umzurechnen.

ist und sich somit die Parameter s und v finden lassen, die dann zu pythagoräischen Zahlen mit dem gesuchten Verhältnis $y = \frac{b}{a}$ führen. Wenn das Ergebnis x kein Bruch darstellt, so kann man ihn trotzdem durch einen Bruch $\frac{s}{v}$ annähern. Aus den Werten s und v, lassen sich dann pythagoräische Zahlen mit dem Verhältnis $\frac{b}{a} = f(\frac{s}{v})$ bestimmen. Da die Umrechnungsfunktion f stetig ist, ist $\frac{b}{a} = f(\frac{s}{v})$ auch eine Näherung des gesuchten Verhältnisses y. Schließlich kann man auch beliebige Seitenverhältnisse y annähern, z.B. auch Werte wie $\sqrt{2}$ oder π, die selbst keine Brüche sind. Dazu errechnet man, wie oben beschrieben, $x = f^{-1}(y)$, nähert x durch einen Bruch $\frac{s}{v}$ an und bestimmt anschließend aus s und v die pythagoräischen Zahlen, die ein Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$ haben, welches sehr nahe an y liegt.

Will man zum Beispiel ein pythagoräisches Dreieck finden, dessen Seitenverhältnis $\frac{b}{a} \approx \sqrt{2} = y$ ist, so berechnet man zuerst $x = y + \sqrt{y^2+1} \approx 3,14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50}$. Dann setzt man $s = 157$ und $v = 50$ und errechnet mit Hilfe von Satz 1 die pythagoräischen Zahlen

$$a = 2 \cdot v \cdot s = 15700, \quad (37)$$
$$b = s^2 - v^2 = 22149, \quad (38)$$
$$c = s^2 + v^2 = 27149. \quad (39)$$

Und tatsächlich ist $\frac{b}{a} = \frac{22149}{15700} \approx 1.41 \approx \sqrt{2}$ und es gilt $a^2 + b^2 = c^2$, also

$$15700^2 + 22149^2 = 27149^2 (= 737068201) \quad (40)$$

Fazit: Jedes Seitenverhältnis (von Katheten a und b) in einem rechtwinkligen Dreieck lässt sich durch das Verhältnis von pythagoräischen Zahlen approximieren! Na, wenn das nichts ist!

6 Schlussbemerkungen

Dieser Text darf ungeteilt frei kopiert und weitergegeben werden. Es darf auch gerne aus diesem Text unter Nennung der Quelle zitiert werden. Das Original dürfte bis auf weiteres unter den Domain "www.r-kempf.de" zu finden sein.

Diesem Aufsatz liegt keine fundierte Literaturrecherche zu Grunde. Es ist durchaus möglich, dass große Teile des Inhaltes – und im speziellen Satz 1 – schon seit Jahrtausenden bekannt sind. Aber, was soll's? Sollten Ihnen Teile dieses Textes aus anderen Quellen bekannt vorkommen, so ist dies purer Zufall. Auf eine Anregung und Prüfung hin, nehme ich diese Texte aber auch gerne in die Literaturhinweise am Ende des Artikels auf.

Ich hoffe, der Text hat Ihnen gefallen!

Darmstadt, den 25. Mai 2003,
Roland Kempf

Literatur

[1] Martin Gardner, Mathematisches Labyrinth, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, ISBN: 3-528-08402-2, 1979

[2] Elisha S. Loomis, The Pythagorean Proposition, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968

[3] Simon Singh, Fermats letzter Satz, dtv-Verlag, München, ISBN: 3-423-33052-X, 2000